

*Underground Interdisciplinary Laboratories*

***Dokazivanje Zemljine zakrivljenosti i  
računanje Zemljinog radijusa***

**Autori:** Jankoski Jan, Tokić Zdeslav

**Datum:** Rujan 2024.

**Lokacija:** Stupin, Hrvatska



## **Kazalo:**

<b>1. Sadržaj</b> .....	1
<b>2. Uvod</b> .....	2
<b>3. Metodologija</b> .....	4
<b>4. Rezultati</b> .....	7
<b>5. Rasprava</b> .....	10
<b>6. Zaključak</b> .....	11
<b>7. Literatura</b> .....	12
<b>8. Dodatak</b> .....	13

## **1. Sadržaj**

Istraživanje je provedeno u svrhu dokazivanja Zemljine zakrivljenosti i izračuna Zemljinog radijusa. Ovo je postignuto promatranjem tijela udaljenih oko 2,85 km preko približno ravne površine (Jadranskog mora). Tijela su promatrana durbinom. Eksperiment se proveo u djelomično zatvorenoj uvali Tvrdača kako bi se spriječio utjecaj valova na rezultate eksperimenta. Uz to, eksperiment je proveden rano navečer kako bi se izbjegao efekt refrakcije koji bi isto utjecao na rezultate eksperimenta. Promatrana tijela su plutače, koje su promatrane prvo s veće visine (1,12 m ASL<sup>a</sup>) na kojoj su bile potpuno vidljive, a zatim su promatrane na visini bližoj razini mora (0,12 m ASL) na kojoj većina njih više nisu bile vidljive. Samo su vrhovi dviju (2) većih plutača bile vidljive. Izmjerena je visina plutače koja je ostala vidljiva iznad vodene površine (približno 0,21 m), tj. visina tijela koju je Zemljin horizont prekrpio. Koristeći udaljenost od tijela, visinu promatranja i prekrivenu visinu promatranog tijela izračunata je udaljenost do horizonta (1 226 m), a zatim i radijus Zemlje na približno 6 272 km.

**Ključne riječi i izrazi:** Zemljina zakrivljenost, udaljenost od horizonta, Zemljin radijus.

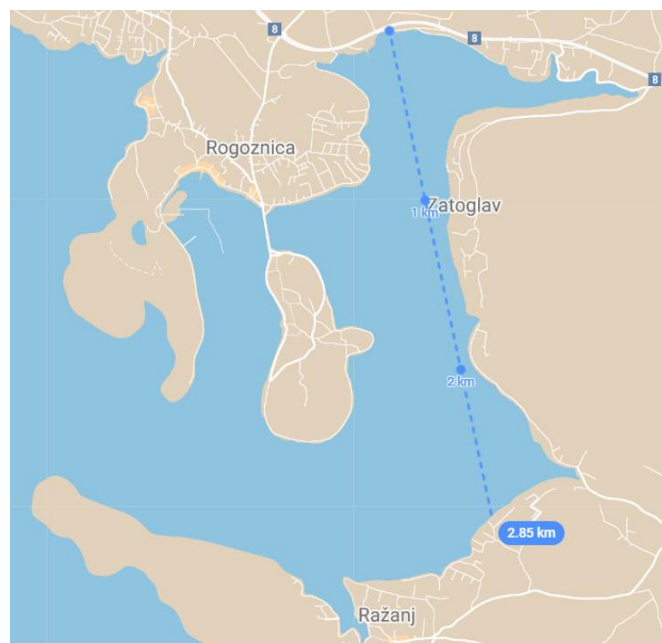
---

<sup>a</sup>ASL – Skraćeno za eng. „above sea level“, tj. „iznad razine mora“. Način mjerenja visine relativno na razinu mora.

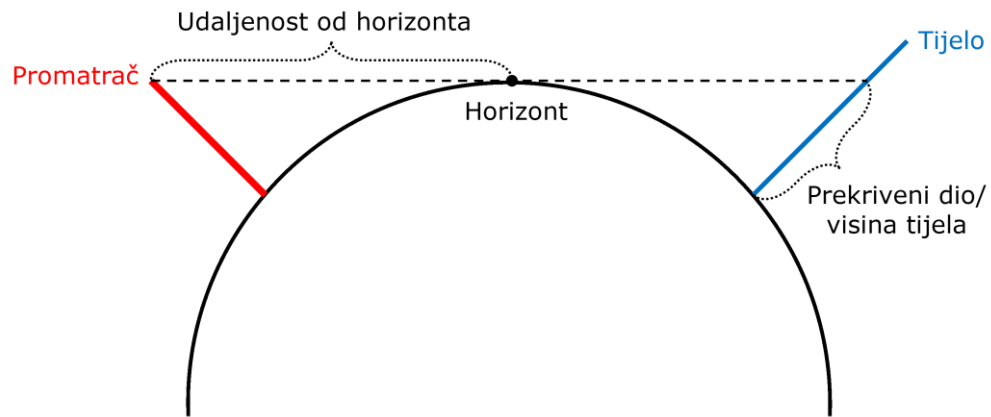
## 2. Uvod

Oblik Zemlje je sličan obliku kugle. Zato se sferni model može koristiti za dokazivanje Zemljine zakrivljenosti i za računanje njezinog prosječnog radijusa.<sup>[1]</sup>

Cilj eksperimenta je dokazati Zemljinu zakrivljenost promatrajući nestajanje tijela iza horizonta i izračunati Zemljin radijus na temelju promatranja.<sup>[2][3]</sup> Promatranje je izvedeno iznad dovoljno ravne površine kako bi se postigli što precizniji rezultati. Stoga, eksperiment je proveden iznad površine Jadranskog mora u djelomice zatvorenoj uvali Tvrdča kako bi se spriječio utjecaj valova na rezultate eksperimenta. Eksperiment je također proveden rano navečer kako bi se spriječilo zagrijavanje mora zbog dnevne Sunčeve svjetlosti. U suprotnom, morska voda bi isparavala stvarajući efekt refrakcije što bi također utjecalo na rezultate eksperimenta.<sup>[4]</sup>



Slika 1: Karta koja prikazuje lokaciju promatranja i približnu lokaciju promatranog tijela.



*Slika 2: Pojednostavljeni prikaz opisanog promatranja. Dio tijela nije vidljiv jer ga je „sakrio“ Zemljin horizont.*

Udaljenost između promatrača i tijela (u nastavku „udaljenost od tijela“) je približno 2 850 m, kao što je prikazano na Slici 1.

Na Slici 2 prikazan je pojednostavljeni model opisanog promatranja. Dio tijela nije vidljiv jer ga je „sakrio“ Zemljin horizont.

### 3. Metodologija



Slika 3: Durbin u višem položaju.



Slika 4: Durbin u nižem položaju.

Durbin s najvećim uvećanjem od 50x korišten je u promatranju tijela. Durbin je prvo postavljen na tronožac u viši položaj (na visini 1 m AGL<sup>b</sup>). U promatranom prostoru je prvo traženo potencijalno tijelo / tijela za promatranje. Skupina plutača za sidrenje (u nastavku „plutače“) je pronađen i promatran.

Nakon što su plutače promatrane u višem položaju (Slika 3), durbin je pomaknut u niži položaj (na razini tla, Slika 4). Nakon sljedećeg promatranja visina razine tla je izmjerena relativno na razinu mora. Izmjereno je da je razina tla bila približno 0,12 m iznad razine mora.

---

<sup>b</sup>ASL – Skraćeno za eng. „above ground level“, tj. „iznad razine zemlje“. Način mjerenja visine relativno na razinu tla.

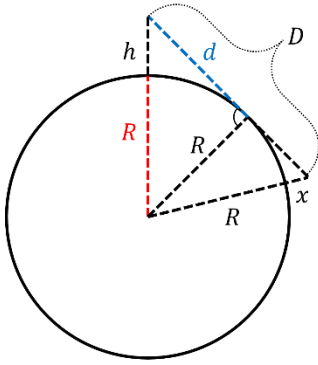
Izračunato je da je početna razina promatranja bila 1,12 m ASL, a završna 0,12 m ASL (Izračun 1).

$$\begin{array}{l|l} H_g = 1m & H = H_g + s = 1 + 0,12 \quad \boxed{H = 1,12m} \\ h_g = 0 & \\ s = 0,12m & h = h_g + s = 0 + 0,12 \quad \boxed{h = 0,12m} \end{array}$$

*Izračun 1: Računanje početne (H) i završne (h) razine promatranja. ( $H_g$  - početna razina promatranja AGL;  $h_g$  - početna razina promatranja AGL;  $s$  - razina tla relativno na razinu mora)*

Znajući udaljenost od tijela (D), razinu promatranja (h) i prekrivenu visinu tijela (x) i pod pretpostavkom da je udaljenost od horizonta (d) poznata, izvedena je jednačba za računanje radijusa Zemlje (R).

S obzirom da udaljenost od horizonta nije poznata, izvedena je i jednačba za računanje udaljenosti od horizonta (Izračun 2).



$$\begin{cases} d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \\ x + R = \sqrt{(D-d)^2 + R^2} \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} d^2 &= (R+h)^2 - R^2 \\ R^2 &= (R+h)^2 - d^2 \\ R^2 &= R^2 + 2Rh + h^2 - d^2 \\ 2Rh &= d^2 - h^2 \end{aligned}$$

$$(x+R)^2 = (D-d)^2 + R^2$$

$$\left(x + \frac{d^2 - h^2}{2h}\right)^2 = (D-d)^2 + \left(\frac{d^2 - h^2}{2h}\right)^2$$

$$R = \frac{d^2 - h^2}{2h}$$

$$x^2 + \cancel{2x} \frac{d^2 - h^2}{\cancel{2h}} + \left(\frac{d^2 - h^2}{2h}\right)^2 = D^2 - 2Dd + d^2 + \left(\frac{d^2 - h^2}{2h}\right)^2 \cdot h$$

$$x^2 h + x d^2 - x h^2 = D^2 h - 2Ddh + d^2 h$$

$$(x-h)d^2 + 2Dhd + h(x^2 - xh - D^2) = 0$$

$$d = \frac{-2Dh \pm \sqrt{4D^2 h^2 - 4(x-h)h(x^2 - xh - D^2)}}{2(x-h)}$$

$$d = \frac{\pm \sqrt{4D^2 h^2 - (4xh - 4h^2)(x^2 - xh - D^2)} - 2Dh}{2(x-h)}$$

$$d = \frac{\pm \sqrt{4D^2 h^2 - 4x^3 h + 4x^2 h^2 + 4xhD^2 + 4x^2 h^2 - 4xh^3 - 4D^2 h^2} - 2Dh}{2(x-h)}$$

$$d = \frac{\pm \sqrt{4(2x^2 h^2 - x^3 h + xhD^2 - xh^3)} - 2Dh}{2(x-h)}$$

$$d = \frac{\pm \sqrt{(2x^2 h^2 - x^3 h + xhD^2 - xh^3)} - Dh}{x-h}$$

$$d = \frac{\pm \sqrt{2x^2 h^2 - x^3 h + xhD^2 - xh^3} - Dh}{x-h}$$

$$d = \frac{\pm \sqrt{xhD^2 - xh(x^2 - 2xh + h^2)} - Dh}{x-h}$$

$$d = \frac{\pm \sqrt{xh(D^2 - (x-h)^2)} - Dh}{x-h} \quad x \neq h$$

Izračun 2: Izvod jednadžbe za udaljenost od horizonta ( $d$ ) i radijus Zemlje ( $R$ ). ( $D$  - udaljenost od tijela;  $h$  - razina promatranja;  $x$  - prekrivena visina tijela)



## 4. Rezultati

Prvo i drugo promatranje kroz durbin bilo je fotografirano kamerom na mobilnom uređaju (Slika 5 i Slika 6).



*Slika 5: Prvo promatranje.*



*Slika 6: Drugo promatranje.*

Zbog malo drugačijeg usmjerenja durbina između prvog i drugog promatranja, samo dio koji je vidljiv u obje fotografije je uspoređen. Trokatna zgrada građena od cigle, koja je vidljiva u pozadinama obje fotografije (Slika 5 i Slika 6) koristi se kao orijentir pri uspoređivanju promatranja.

Promatranje na 1,12m:



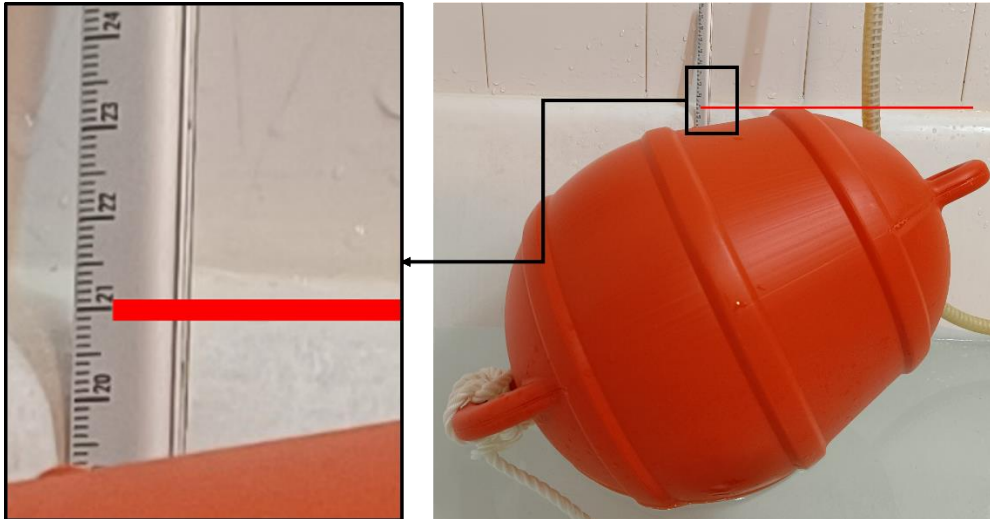
Promatranje na 0,12m:



*Slika 7: Usporedba prvog (lijevo) i drugog (desno) promatranja.*

U lijevom dijelu Slike 7 (u nastavku „Slika 7L“), koja prikazuje prvo promatranje, šest plutača potpuno je vidljivo. U desnom dijelu Slike 7 (u nastavku „Slika 7D“), koja prikazuje drugo promatranje, četiri od šest plutača nije vidljivo. Samo vrhovi dviju većih plutača ostaju vidljivi. Na Slici 7L nisu uzete u obzir dvije skroz desno položene vidljive plutače jer one nisu vidljive u okviru Slike 7D (vidjeti položaj mosta najdesnijeg broda).

Iako je plutača u vertikalnom položaju visoka 0,39 m, polegnuta u vodi nije postavljena uspravno već je malim dijelom volumena uronjena u vodu i njena najviša točka nije pri „najširem“ dijelu plutače. S obzirom na navedeno bilo je potrebno izvršiti dodatno mjerenje visine plutače iznad površine vode (u nastavku „visina plutače“).



Slika 8: Mjerenje visine plutače na vodi, tj. prekrivenog dijela tijela ( $x$ ).

Izmjerena visina plutače iznosi približno 0,21 m (Slika 8). S obzirom da je promatranje prikazalo potpuno prekrivanje manjih plutača, zaključeno je da je prekrivena visina tijela približno jednaka visini plutače. Znajući udaljenost od tijela, razinu promatranja i prekrivenu visinu tijela te korištenjem jednadžbi izvedenih u Izračunu 2, izračunata je udaljenost od horizonta, a zatim i radijus Zemlje (Izračun 3).

$D = 2\,850\text{m}$	$d = \frac{\pm\sqrt{xh(D^2 - (x-h)^2)} - Dh}{x-h}$
$h = 0,12\text{m}$	
$x = 0,21\text{m}$	
$R = ?$	$d = \frac{\sqrt{0,21 \cdot 0,12(2\,850^2 - (0,21 - 0,12)^2)} - 2\,850 \cdot 0,12}{0,21 - 0,12}$
	$d = 1\,226,9275\text{m}$
	$R = \frac{d^2 - h^2}{2h} = \frac{1\,226,9275^2 - 0,12^2}{2 \cdot 0,12} = 6\,272\,296,149\text{m}$
	$R \approx 6\,272\text{ km}$

Izračun 3: Računanje radijusa Zemlje. ( $D$  - udaljenost od tijela;  $h$  - razina promatranja;  $x$  - prekrivena visina tijela;  $d$  - udaljenost od horizonta;  $R$  - radijus Zemlje)

Iz navedenih mjerenja i izračuna slijedi da udaljenost od horizonta iznosi oko 1 226 m, dok radijus Zemlje iznosi približno **6 272 km**.

## **5. Rasprava**

Na temelju raspoloživih podataka na internetu može se zaključiti da je radijus Zemlje na ekvatoru jednak **6 371 km**.<sup>[6]</sup> Radijus Zemlje izračunat u ovom eksperimentu jednak je **6 272 km**. Visoka preciznost rezultata mjerenja (oko 98,45%) ukazuje na to da su metode korištene pri izvođenju eksperimenta ispravne te da su izvedene jednadžbe za računanje udaljenosti od horizonta i radijusa Zemlje točne.

Razlika između izmjerenog i stvarnog radijusa Zemlje najvjerojatnije je uzrokovana ograničenjima opreme korištene pri izvođenju eksperimenta i neprecizno izmjerenom udaljenosti od tijela.

Za buduće istraživanje predlaže se korištenje preciznije mjerne opreme, primjerice digitalni dalekozor s većim uvećanjem i mogućnošću fotografiranja, čime bi se tijekom promatranja mogla izmjeriti prekrivena visina tijela. Bilo bi potrebno i zabilježiti preciznu lokaciju promatranih tijela kako bi izmjerena udaljenost od tijela bila preciznija.

## **6. Zaključak**

Od šest plutača vidljivih na Slici 7L, na Slici 7D mogu se uočiti samo vrhovi dviju većih plutača. Ovime je dokazana zakrivljenost Zemlje i da je Zemljin oblik približno jednak obliku kugle.

Kako se Zemlja „krivi“, njen horizont prekriva udaljena tijela. Što je promatrač bliže razini površine, to je horizont bliži i s time prekriva veću visinu tijela. Stoga, mjerenjem visine plutače koja je potpuno prekrivena približno je izmjerena prekrivena visina tijela. Na temelju mjerenja izračunati radijus Zemlje iznosi **6 272 km**.

## **7. Literatura**

- [1] The Editors of Wikipedia; Wikipedia; 2019; "Spherical Earth"; Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_Earth](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_Earth) (Pristupljeno: 10.8.2024)
- [2] The Editors of Wikipedia; Wikipedia; 2023; "Empirical evidence for the spherical shape of Earth"; Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Empirical\\_evidence\\_for\\_the\\_spherical\\_shape\\_of\\_Earth](https://en.wikipedia.org/wiki/Empirical_evidence_for_the_spherical_shape_of_Earth) (Pristupljeno: 7.8.2024)
- [3] Sottosanti K.; Encyclopaedia Britannica; 2022; "Spherical Earth"; Dostupno na: <https://www.britannica.com/science/spherical-Earth> (Pristupljeno: 11.8.2024)
- [4] Lotha G., Gupta K., Shukla G., Gregersen E., Tikkanen A., Gaur A., Young G.; Encyclopaedia Britannica; 1998; "Refraction"; Dostupno na: <https://www.britannica.com/science/refraction> (Pristupljeno: 11.8.2024)
- [5] The Editors of Wikipedia; Wikipedia; 2011; "Horizon"; Dostupno na: <https://en.wikipedia.org/wiki/Horizon> (Pristupljeno: 8.8.2024)
- [6] Szyk B., Omni Calculator; 2024; "Earth Curvature Calculator"; Dostupno na: <https://www.omnicalculator.com/physics/earth-curvature> (Pristupljeno: 8.8.2024)



## **8. Dodatak**

### **Dodatak 1 – GPS lokacija promatranja:**

43°32'28.3"N, 15°58'36.2"E

43.541204, 15.9760843

### **Dodatak 2 – Uvećane slike promatranja:**

Prvo promatranje:



Drugo promatranje:





**Dodatak 3 – Dodatne slike eksperimenta:**

